ØVING 3

OPPGAVE 1

$$((\neg p \wedge q) \wedge (q \wedge r)) \wedge \neg q$$

$$(q \wedge (\neg p \wedge r)) \wedge \neg q$$

$$(q \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge r)$$

$$F \wedge (\neg p \wedge r)$$

$$F$$

p	q	r	$\neg p \wedge q$	$q \wedge r$	$((\neg p \wedge q) \wedge (q \wedge r)) \wedge \neg q$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0

$((\neg p \wedge q) \wedge (q \wedge r)) \wedge \neg q$ er en motsigelse.

$(\neg p \vee \neg q) \wedge ((r \wedge \neg r) \vee p) \wedge p$

Negation law

$(\neg p \vee \neg q) \wedge (F \vee p) \wedge p$

Identity law

$(\neg p \vee \neg q) \wedge p \wedge p$

Idempotent law

$(\neg p \vee \neg q) \wedge p$

Distributive law

$(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)$

Negation law

$F \vee (p \wedge \neg q)$

Identity law

$\underline{\underline{p \wedge \neg q}}$

OPPGAVE 2

(1) $A = B$ $\quad A \cup C = B \cup C$

Anta $x \in A$, $x \in C$, $x \notin B$

Da vil $x \in A \cup C$ and $x \in B \cup C$

Siden det finnes et moteksempel der x er i A og ikke i B og $A \cup C = B \cup C$ er sant, men $A = B$ vil da ikke stemme. Derfor er $A = B$ ikke en logisk konsekvens av $A \cup C = B \cup C$.

(2) $A = B$ $\quad A \cap C = B \cap C$

Anta at $x \in A$, $x \notin C$, $x \notin B$

Da vil $x \notin A \cap C$ and $x \notin B \cap C$

Her er et moteksempel som sier at x kan være i A og ikke i B som gjør at $A \cap C = B \cap C$ stemmer men $A = B$ ikke stemmer. Ikke logisk konsekvens.

OPPGAVE 3

Bevis eller motbevis følgende:

(1) $p \to (q \land r) \equiv (p \to q) \land (p \to r)$

p	q	r	$q \land r$	$p \to q$	$p \to r$	$p \to (q \land r)$	$(p \to q) \land (p \to r)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

(3) $(p \land q) \to r \not\equiv (p \to r) \land (q \to r)$

p	q	r	$(p \land q)$	$(p \to r)$	$(q \to r)$	$(p \to r) \land (q \to r)$	$(p \land q \to r)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

(4) $(p \vee q) \rightarrow r \not\equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \vee q) \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

(5) $p \wedge (q \rightarrow r) \not\equiv (p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

(6) $p \vee (q \to r) \equiv (p \vee q) \to (p \vee r)$

p	q	r	$q \to r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \to r)$	$(p \vee q) \to (p \vee r)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(2) $p \to (q \vee r) \equiv (p \to q) \vee (p \to r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \to q$	$p \to r$	$p \to (q \vee r)$	$(p \to q) \vee (p \to r)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

OPPGAVE 4

1) Er p en logisk konsekvens av $\{q \vee r,\ q \to p,\ r \to p\}$?

p	q	r	$q \vee r$	$q \to p$	$r \to p$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Ja p er en logisk konsekvens av $\{q \vee r,\ q \to p,\ r \to p\}$.

(2) Er $p \to q$ en logisk konsekvens av $\{p \to r, r \to q\}$

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$r \to q$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Ja $p \to q$ er en logisk konsekvens av $\{p \to r, r \to q\}$

OPPGAVE 5 $\{1, 2, 3\}$

(1) $R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

Denne relasjonen er:

- refleksiv fordi for alle x i S er $\langle x, x\rangle \in R_1$.
- symmetrisk fordi $\langle x, y\rangle$ og $\langle y, x\rangle \in R_1$ og $x = y$.
- transitiv fordi vi alle elementene er koblet til seg selv.

  $\langle 1, 1\rangle$ $\langle 1, 1\rangle$ $\langle 1, 1\rangle$
  x, y y, z x, z
- antisymmetrisk fordi for alle $\langle x, y\rangle \in R_1$, $x = y$
- ikke irrefleksiv fordi det finnes relasjoner da et element er koblet til samme element. eks. $\langle 1, 1\rangle$.

(2) $R_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,2\rangle\}$

Denne relasjonen er:

- refleksiv fordi $\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle \in R_2$.
- ikke symmetrisk fordi $\langle 2,1\rangle \notin R_2$
- Den er transitiv fordi for alle $\langle x,y\rangle$ $\langle y,z\rangle$ finnes det $\langle x,z\rangle$
- antisymmetrisk fordi $\langle 2,1\rangle \notin R_2$
- ikke irrefleksiv fordi $\langle 1,1\rangle \in R_2$.

(3) $R_3 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

Denne relasjonen er:

- refeksiv fordi $\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle \in R_3$
- ikke symmetrisk fordi $\langle 1,2\rangle \in R_3$ men $\langle 2,1\rangle \notin R_3$
- ikke transitiv fordi $\langle 1,3\rangle \notin R_3$.
- antisymmetrisk fordi $\langle 2,1\rangle$ og $\langle 3,2\rangle \notin R_3$
- ikke irrefleksive fordi $\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle \in R_3$

(5) $R_5 = \{\langle 1,2 \rangle\}$

Relasjonen er:

- ikke refleksiv fordi $x \neq y$ for $\langle x,y \rangle \in R_5$
- ikke symmetrisk fordi $\langle 1,2 \rangle \in R_5$ men $\langle 2,1 \rangle \notin R_5$
- transitiv fordi det kun finnes en relasjon i relasjonen.
- antisymmetrisk fordi $\langle 1,2 \rangle \in R_5$ og $\langle 2,1 \rangle \notin R_5$.
- irrefleksiv fordi ingen av elementene i relasjonen er like.

(6) $R_6 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$

Relasjonen er:

- ikke refleksiv fordi $\langle 2,2\rangle \notin R_6$
- symmetrisk fordi både $\langle 1,2\rangle$ og $\langle 2,1\rangle \in R_6$
- ikke transitiv fordi $\langle 2,2\rangle \notin$ **R_6**
- ikke antisymmetrisk fordi både $\langle 1,2\rangle$ og $\langle 2,1\rangle \in R_6$.
- ikke irrefleksiv fordi $\langle 1,1\rangle \in R_6$

(4) $R_4 = \emptyset$

- ikke refleksiv
- irrefleksiv
- transitiv
- symmetrisk
- antisymmetrisk

(7) $R_7 = \{ \langle 3,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle \}$

Relasjonen er:

- ikke refleksiv fordi $\langle 1,1 \rangle$ og $\langle 2,2 \rangle \in R_7$
- ikke symmetrisk fordi $\langle 2,1 \rangle \in R_7$ men $\langle 1,2 \rangle \notin R_7$.
- ikke transitiv fordi $\langle 3,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle \in R_7$ men $\langle 3,1 \rangle \notin R_7$.
- antisymmetrisk fordi $\langle 3,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle \in R_7$ og $\langle 2,3 \rangle, \langle 1,2 \rangle \notin R_7$.
- ikke irrefeksiv fordi $\langle 3,3 \rangle \in R_7$.

OPPGAVE 6

$A = \{2, 3, 4\}$ $B = \{6, 8, 10\}$

$x \in A$ $y \in B$

$m = \frac{n}{d}$ $dm = n$

$\frac{y}{x} = m$ $y = mx$

$R = \{\langle 2,6\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 2,10\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 4,8\rangle\}$

OPPGAVE 7

$A = \{1, 2, 3\}$

(1) The relation $\sim$ on A defined by $x \sim y$ iff $x + y$ is even.

$R = \{\langle 1,3\rangle \langle 1,1\rangle \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

- refleksiv
- symmetrisk
- transitiv.
- ikke antisymmetrisk
- ikke irrefleksiv

(2) The $\sim$ on A defined by $x \sim y$ iff $2x + y$ is even

$$R_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$$

Relasjonen er:

- ikke refleksiv
- ikke symmetrisk
- transitiv
- antisymmetrisk
- irrefleksiv

(3) The $\sim$ on A defined by $x \sim y$ iff $2x+y$ is odd.

$$R_3 = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$$

Relasjonen er:

- ikke symetrisk
- ikke refleksiv
- ikke transitiv
- ikke antisymmetrisk
- irrefleksiv

(4) The $\sim$ on A defined by $x \sim y$ iff $x \cdot y$ is even.

$R = \{ \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle \langle 2,1 \rangle \langle 1,2 \rangle \}$

Relasjonen er:

- ikke refleksiv
- symmetrisk
- ikke antisymmetrisk
- ikke irrefleksiv
- ikke transitiv

OPPGAVE 8

$X = \{1,2,3,4\} \quad P(X)$

$\mathcal{X} \subset P(X)$

$\mathcal{X} = \{ Y \subseteq X : 1 \in Y \vee 2 \in Y \}$

$P(X) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}$
$\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\} \{2,4\} \{1,2,3\}, \{3,4\},$
$\{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\} \}$

$X = \{\{1\}, \{2\} \{1,2\}$
$\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\} \{2,4\} \{1,2,3\},$
$\{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

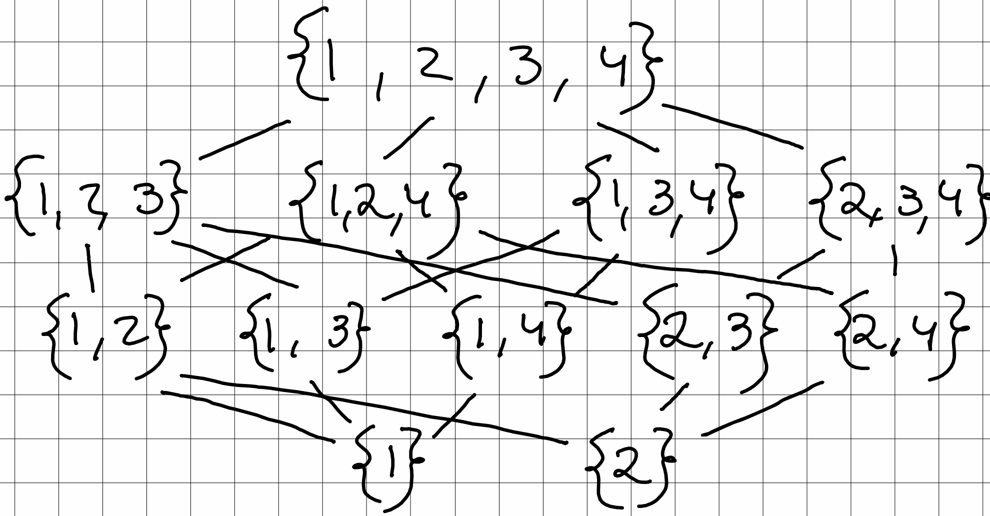
$R = \{\langle x, y \rangle \mid x \subseteq y\}$

Vis at R er en partiell ordning.

- R er refleksiv fordi alle mengder er delmengder av seg selv. Dertor vil alle elementene i x være relatert til seg selv.

- R er transitiv fordi
$x \subseteq y, \; y \subseteq z \Rightarrow x \subseteq z.$

- R er antisymmetrisk fordi
$x \subseteq y$ og $y \subseteq x \Rightarrow x = y$ som betyr at
hvis $\langle x, y \rangle \in R$ og $\langle y, x \rangle \in R \Rightarrow x = y$



OPPGAVE 9

$A = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$

$R = \left\{ \langle (a,b),(c,d) \rangle \mid \frac{c}{a} = m \; \frac{d}{a} = n \quad m \wedge n \in \mathbb{Z} \right\}$

Relasjonen er

Hvis den er refleksiv må $(a,b)(a,b)$

$\langle (a,b),(c,d) \rangle \quad a = c \wedge b = c \wedge \frac{b}{a} = x \in \mathbb{Z}$

Et motbevis er:

$\langle (3,4),(3,4) \rangle \in R, \; \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ Relasjonen er ikke <u>refleksiv.</u>

Symmetrisk:

Anta $\langle(1,4),(3,4)\rangle \in R$ da må $\langle(3,4),(1,4)\rangle \in R$. Men av definisjonen så må $\frac{c}{a}$ og $\frac{d}{a}$ være heltall og $\frac{1}{3}$ og $\frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}^+$

Derfor R ikke symmetrisk

Antisymmetrisk:

Antar at $\langle(1,2),(1,4)\rangle \in R$ da må $\langle(1,4),(1,2)\rangle \in R$ Siden $\frac{1}{1}, \frac{4}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}$ alle gir heltall vil disse relasjonene eksistere i R og da vil relasjonen ikke være antisymmetrisk.

Transitiv:

Hvis $\langle (a,b),(c,d) \rangle \in R$ og $\langle (c,d),(e,f) \rangle \in R$ så må $\langle (a,b),(e,f) \rangle \in R$

For at relasjonene skal eksistere i R må $\frac{c}{a}$ og $\frac{d}{a} \in \mathbb{Z}^+$

og $\frac{e}{c}$ og $\frac{f}{c} \in \mathbb{Z}^+$ og derfor vil $\frac{e}{a}$ og $\frac{f}{a} \in \mathbb{Z}^+$

<u>Derfor er R transitiv.</u>

OPPGAVE 10

$$R = \left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{x+2y}{3} \right\}$$

Refleksiv:

For at R er refleksiv må $x = y$. Da blir

$\frac{\cancel{x} + 2\cancel{x}}{3} = \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}$. Dette vil si at R er refleksiv.

Symmetrisk:

Hvis R er symmetrisk så vil

$$\frac{x+2y}{3} \in \mathbb{Z} \quad \text{og} \quad \frac{y+2x}{3} \in \mathbb{Z}$$

Vi kan skrive $x + 2y = 3n \quad n \in \mathbb{Z}$

$(x+2y) + (y+2x) = 3y + 3x$

$y + 2x = 3x + 3y - (x+2y)$

$$y + 2x + x + 2y = 3x + 3y$$

$$y + 2x = 3x + 3y - (x + 2y)$$

$$y + 2x = 3x + 3y - 3n$$

$$y + 2x = 3(x + y - n)$$

siden 3 er en faktor av $(y + 2x)$ så vil det gi et heltall når man deler det på 3.

Derfor er R symmetrisk

Antisymmetrisk:

Hvis R skal være antisymmetrisk

må $(x, y) \in R$ men $(y, x) \notin R$

$\langle 3, 6 \rangle$ $\langle 6, 3 \rangle$

$\downarrow$ $\downarrow$

$\frac{3 + 2 \cdot 6}{3} = 5 \in \mathbb{Z}$ $\frac{6 + 2 \cdot 3}{3} = 5 \in \mathbb{Z}$

Her er et moteksempel

<u>Derfor er R ikke antisymmetrisk</u>

Transitiv:

Hvis

$\frac{x + 2y}{3} \in$ og $\frac{y + 2z}{3} \in R$ da må

$\frac{x + 2z}{3} \in R$

Dersom vi antar at
$\langle x, y \rangle$ og $\langle y, z \rangle$ finnes i
relasjonen, så vil de oppfylle
kravene: $\frac{(x+2y)}{3}$ og $\frac{(y+2z)}{3}$

$$\frac{(x+2y)+(y+2z)-3y}{3}$$

(Vi kan trekke fra $3y$ fordi
det også er delelig med 3.)

Da vil $\frac{x+2y}{3}$ også bli
et heltall.

<u>Dermed er R transitiv.</u>