ØVING 4

Oppgave 1

$X_1 := \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is a multiple of } 6 \}$

$X_2 := \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is a multiple of } 2 \text{ and } n \text{ is a multiple of } 3 \}$

$X_1 = \{ 0, 6, 12, 18, 24 \ldots \}$

$2 \cdot 0 = 0$	$0 = 0 \cdot 3$
$2 \cdot 1 = 2$	$3 = 1 \cdot 3$
$2 \cdot 2 = 4$	$6 = 2 \cdot 3$
$2 \cdot 3 = 6$	$9 = 3 \cdot 3$
$2 \cdot 4 = 8$	$12 = 4 \cdot 3$
$2 \cdot 5 = 10$	$15 = 5 \cdot 3$
$2 \cdot 6 = 12$	$18 = 6 \cdot 3$
$2 \cdot 7 = 14$	
$2 \cdot 9 = 18$	

$X_2 = \{ 0, 6, 12, 18 \ldots \}$

X_1 og X_2 er like fordi betingelsene for elementene er de samme.

I X_1 må 6 være en faktor og i X_2 må 2 og 3 være en faktor.
Hvis $n \cdot 2$ skal bli det samme som $p \cdot 3$ må $3 | n$ og $2 | p$.

F. eks.

$$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$$
$$3 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$$
$$6 \cdot 1 = 6 \cdot 1 = 6$$

Eller:

$$6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 12$$
$$2 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$
$$6 \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$$

(2) X_i, $i = 1, 2, 3, 4$ of uni. X.

$$\left[X_2 \cap \left([X_3 \cap X_4] \cup [X_3 \cap \overline{X_4}]\right)\right] \cup (X_1 \cap X_2)$$

$$\left[X_2 \cap \left(X_3 \cap [X_4 \cup \overline{X_4}]\right)\right] \cup (X_1 \cap X_2)$$

$$(X_2 \cap X_3) \cup (X_1 \cap X_2)$$

$$\underline{\underline{X_2 \cap (X_1 \cup X_3)}}$$

OPPGAVE 2

$\psi : X_1 \to X_2 \qquad Y_j \subseteq X_1$

$j = 1, 2$

i)

$$\{\psi(x) \mid x \in Y_1 \cup Y_2\}$$

$$\underline{\psi[Y_1 \cup Y_2]} = \underline{\psi[Y_1] \cup \psi[Y_2]}$$

$$\psi[Y_1 \cup Y_2] = \psi[Y_1] \cup \psi[Y_2]$$

$$\psi[Y_1 \cup Y_2] = \{\psi(x) \mid x \in (Y_1 \cup Y_2)\}$$

$\{\psi(x) \mid x \in Y_1$ eller $x \in Y_2\}$

$$\{\psi(x) \mid x \in Y_1\} \cup \{\psi(x) \mid x \in Y_2\}$$

$$\psi[Y_1] \cup \psi[Y_2]$$

ii) $\psi[Y_1 \cap Y_2] \subset \psi[Y_1] \cap \psi[Y_2]$

Viser på neste side at $\psi(Y_1 \cap Y_2)$ er en delmengde av $\psi(Y_1) \cap \psi(Y_2)$, men at det ikke behøver å være motsatt derfor er de ikke like.

Lar $y \in \psi[Y_1 \cap Y_2]$

$\Rightarrow \exists x \in Y_1 \cap Y_2$ s.t.

$\psi(x) = y$

$\Rightarrow x \in Y_1$ og $x \in Y_2$

$\Rightarrow \psi[x] \in Y_1$ og $\psi[x] = Y_2$

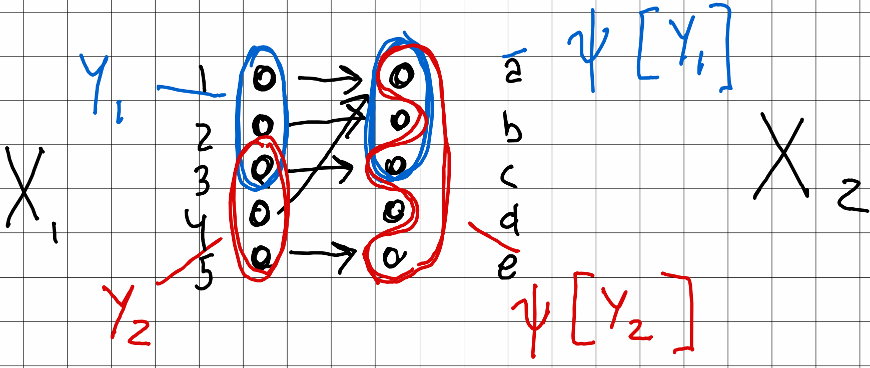
$\rightarrow \exists x \in Y_1$ s.t. $\psi(x) = y$

og $\exists x \in Y_2$ s.t. $\psi(x) = y$

$\Rightarrow y \in \psi[Y_1]$ og

$y \in \psi[Y_2]$

$\Rightarrow y \in \psi[Y_1] \cap \psi[B]$



$Y_1 \cap Y_2 = 3$

$\psi[Y_1] = \{a, b, c\}$

$\psi[Y_1 \cap Y_2]$

$\psi[Y_2] = \{a, c, e\}$

$\psi[2] = \{c\}$

$\psi[Y_1] \cap \psi[Y_2] = \{a, c\}$

$$\psi[Y_1 \cap Y_2] \neq \psi[Y_1] \cap [Y_2]$$

$\square$

OPPGAVE 3

$\psi_1 : X_1 \to X_2 \qquad \psi_2 : X_2 \to X_3$

(1) "Hvis ψ_1 og ψ_2 er injektive da er $\psi_2 \circ \psi_1$ injektiv"

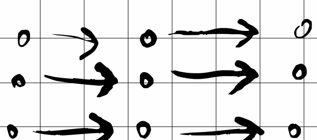
$$\psi_2 \circ \psi_1 = \psi_2(\psi_1) \Rightarrow X_1 \to X_3$$

$X_1 \to X_3$ er injektiv fordi alle input i X_1 vil få ulike outputs i X_2 og alle disse igjen vil få ulike outputs i X_3

(2) "Hvis ψ_1 og ψ_2 er surjektive, da er $v_2 \circ \psi_1$ surjectiv"

$$\psi_2 \circ \psi_1 = \psi_2(\psi_1) = X_1 \to X_3$$

$\forall y \in X_2 \ \exists x \in X_1$ og for



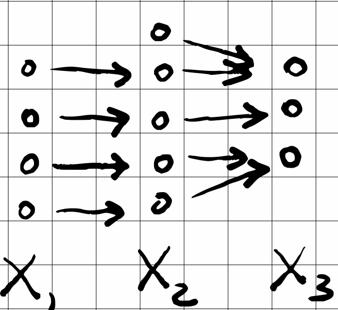
$\forall z \in X_3 \quad \exists y \in X_2$

(3) "Hvis ψ_1 og ψ_2 er bijektive, da er $\psi_2 \circ \psi_1$ også bijektiv."

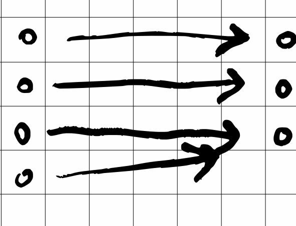
Siden jeg har vist i de tidligere oppgavene at dersom ψ_1 og ψ_2 er injektive eller surjektive vil også $\psi_2 \circ \psi$ være injektiv eller surjektiv vil ~~dette~~ også gjelde for bijektiv.

(4) "Hvis ψ_1 er injektiv og ψ_2 er surjektiv, da vil $\psi_2 \circ \psi_1$ være bijektiv"

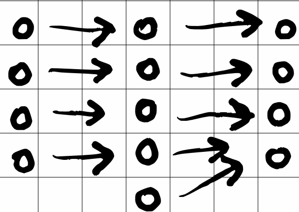
$X_1 \to X_3$



Denne er ikke bijektiv.

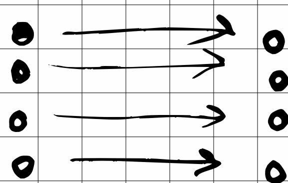


5 "Hvis $\psi_2 \circ \psi_1$ er surjektiv da er ψ_1 surjektiv"



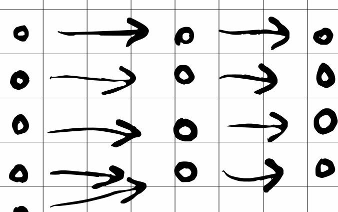
ikke surjektiv

moteksempel



surjektiv

6 Hvis ψ_2 er injektiv da er $\psi_2 \circ \psi_1$ injektiv.

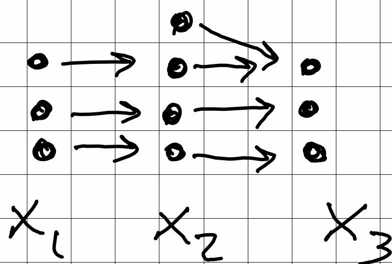


moteksempel

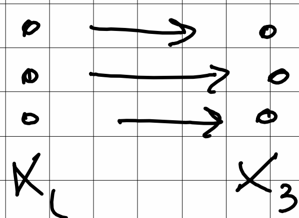
Injektiv

ikke injektiv

7 "Hvis ψ_2 ikke er injektiv, da er $\psi_2 \circ \psi_1$ ikke injektiv."



ikke injektiv



injektiv.

Selv om ψ_2 ikke er injektiv, kan $\psi_2 \circ \psi_1$ være injektiv.

OPPGAVE 4

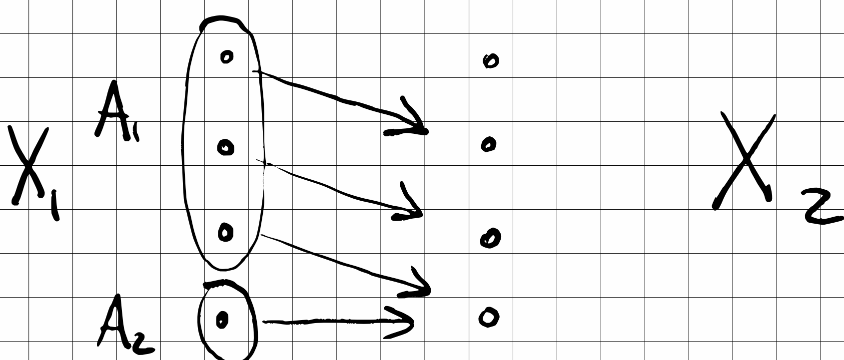
$\beta : X_1 \to X_2$ $\quad X_1 = A_1 \cup A_2$

$\beta \restriction_{A_i}$ $\quad i = 1,2$ er injektiv

da er β injektiv

$\beta \restriction_{A_1} : A_1 \to X_2$

$\beta \restriction_{A_2} : A_2 \to X_2$



$\beta \restriction A_i$ $\quad i = 1,2$ er injektiv
men $\beta : X_1 \to X_2$ er ikke
injektiv

OPPGAVE 6

(1) $\lfloor 25/4 \rfloor = \underline{\underline{6}}$ $\lceil 25/4 \rceil = \underline{\underline{7}}$

$\lfloor 0,999 \rfloor = \underline{\underline{0}}$ $\lceil 0,99 \rceil = \underline{\underline{1}}$

$\lfloor -2,01 \rfloor = \underline{\underline{-3}}$ $\lceil -2,01 \rceil = \underline{\underline{-2}}$

(2) $\lfloor x_1 + x_2 \rfloor \neq \lfloor x_1 \rfloor + \lfloor x_2 \rfloor$

fordi summen av to desimaler kan bli mer enn 1 og da gi en annen floor verdi.

Eks

$$\lfloor 1.5 + 1.5 \rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 3$$

$$\lfloor 1.5 \rfloor + \lfloor 1.5 \rfloor = 1 + 1 = 2$$

$$3 \neq 2$$

(3) $\boxed{\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n}$

Anta at $\lfloor x \rfloor = m$, m er et positivt heltall.

$m \leq x < m+1$

$m+n \leq x+n < m+n+1$

$\lfloor x+n \rfloor = m+n = \lfloor x \rfloor + n$

Eks.

$\lfloor 1.6 + 8 \rfloor = \lfloor 9.6 \rfloor = 9$

$\lfloor 1.6 \rfloor + 8 = 1+8 = 9$

$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ stemmer.

♡

OPPGAVE 7

i) $p(t) = 4t - 1 \qquad p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Injektiv:

$p(t) = p(s), \quad t = s$

$4t - 1 = 4s - 1 \Rightarrow 4t = 4s \Rightarrow$

$t = s$

Forskjellige x-verdier vil alltid gi forskjellige y-verdier derfor er funksjonen injektiv.

Surjektiv:

$p(t) = s$

$4t - 1 = s$

$t = \frac{s+1}{4}$

For alle $s \in \mathbb{R}$, finnes det en $t \in \mathbb{R}$.

$p(t) = 4\left(\frac{s+1}{4}\right) - 1$

$= s + 1 - 1 = s$

$p(t) = s$

Den er surjektiv.

Siden p er injektiv og surjectiv så er den bijektiv.

$$p^{-1} = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$p(t) = 4t - 1$$

$$s = 4t - 1$$

$$t = 4s - 1$$

$$s = \frac{t+1}{4}$$

$$\underline{\underline{p^{-1}(t) = \frac{t+1}{4}}} \to \text{inversen til } p$$

ii) $p(n) = 4n - 1$ $\quad p: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Injektiv:

$$p(n) = p(s) \to n = s$$

$$4n - 1 = 4s - 1$$

$$4n = 4s$$

$$n = s$$

P(n) er injektiv.

Surjektiv:

$P(n) = 4n-1$

$P(n) = s \in \mathbb{Z}$

$5 \in \mathbb{Z}$

$4n - 1 = 5$

$4n = 6$

$n = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

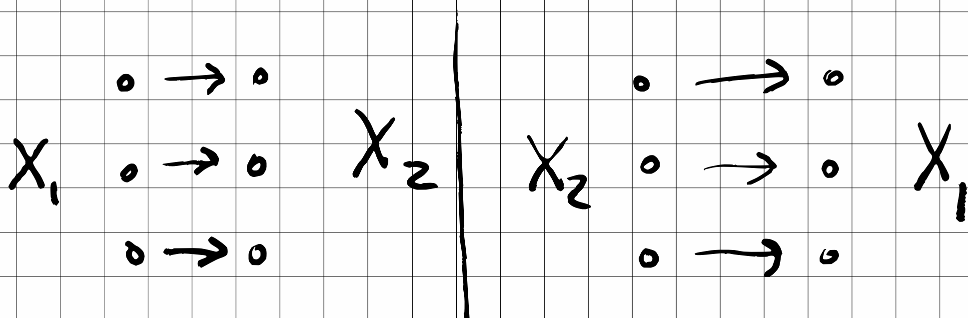
Ikke surjektiv.

Siden $p(n)$ er injektiv, men ikke surjektiv, er den ikke bijektiv.

OPPGAVE 8

$$a: X_1 \to X_2$$
$$a^{-1}: X_2 \to X_1$$

a er bijektiv fordi den både er injektiv og surjektiv.



a^{-1} må da også være injektiv og surjektiv fordi det er kun bijektive funksjoner som har inverse funksjoner. I en bijektiv funksjon går alle input til ulike output.

OPPGAVE 9

for $n \in \mathbb{N}_+$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 1+\delta(n/2) & n \text{ even} \\ \delta(3n-1) & n>1 \text{ odd} \end{cases}$$

$\delta(1) = 1$

$\delta(2) = 1 + \delta(2/2) = 1 + 1 = 2$

$\delta(3) = \delta(8) = 1 + \delta(4) = 1 + 1 + \delta(2)$

$= 2 + 2 = \underline{\underline{4}}$

$\delta(4) = 1 + \delta(2) = 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$

$\delta(5) = \delta(14) = 1 + \delta(7) = 1 + \delta(20)$

$= 1 + 1 + \delta(10) = 2 + 1 + \delta(5)$

Funksjonen er ikke "well defined".

OPPGAVE 10

$$\gamma(n) = \begin{cases} n-10 & n > 100 \\ \gamma \circ \gamma(n+11) & n < 101 \end{cases}$$

$\gamma(90+n) \quad n = 1, \ldots, 11.$

$$\gamma(90+1) = \gamma(91) = \gamma \circ \overbrace{\gamma(102)}^{92}$$

$$= \gamma(92)$$

$$\gamma(92) = \gamma \circ \overbrace{\gamma(103)}^{93} = \gamma(93)$$

$$\gamma(93) = \gamma \circ \gamma(104) = \gamma(94)$$

$$\gamma(94) = \gamma \circ \gamma(105) = \gamma(95)$$

$$\gamma(95) = \gamma \circ \gamma(106) = \gamma(96)$$

$$\gamma(96) = \gamma \circ \gamma(107) = \gamma(97)$$

$$\gamma(97) = \gamma \circ \gamma(108) = \gamma(98)$$

$$\gamma(98) = \gamma \circ \gamma(109) = \gamma(99)$$
$$\gamma(99) = \gamma \circ \gamma(110) = \gamma(100)$$

$$\gamma(100) = \gamma \cdot \gamma(111) = \gamma(101)$$

$$\gamma(101) = 101 - 10 = \underline{\underline{91}}$$

$$\gamma(86) = \gamma \circ \gamma(97) =$$

$$\gamma \circ \gamma \circ \gamma(108) = \gamma \circ \gamma(98)$$
$$= \gamma \circ \gamma \circ \gamma(109) = \gamma \circ \gamma(99)$$

$$= \gamma \circ \gamma \circ \gamma(110) = \gamma \circ \gamma(100)$$
$$= \gamma \circ \gamma \circ \gamma(111) = \gamma \circ \gamma(101)$$
$= \gamma(91) = 91$ (ref forrige oppgave.)

For alle $n < 100$ så
$\gamma(n) = 91$

OPPGAVE